16/05/2016

Υπεσθ

Έστω $(V, <>)$, $(W, <>)$ δύο ευκλείδιοι χώροι (= Χ.Ε.Γ.) Μια απεικόνιση $T: V \to W$ λέγεται γραμμική Ισομετρία αν

i) T: 1-1, Επί, γραμμική

ii) $<T(u), T(v)> = <u, v>$ $\forall$ $u, v \in V$

Υπεσθ $(V, <>)$, $(W, <>)$ λέγονται ισομετρικοί Χ.Ε.Γ αν υπάρχει $T: V \to W$ γραμμ ισομετρία

Στόχος

Αν $\dim_{\mathbb{R}} V$, $\dim_{\mathbb{R}} W$ πεπερασμένες, τότε V, W ισομετρικοί Χ.Ε.Γ αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$

Πρόταση

Έστω $(V, <>)$, $(W, <>)$ δύο Χ.Ε.Γ., $T: V \to W$ γραμμική. $e_1, e_2, \dots, e_n$ ορθοκανονική Βάση του V. ΤΑΕΙ

i) T γραμμική ισομετρία

ii) $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ ορθοκανονική Βάση του W.

(Με άλλα λόγια μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο Χ.Ε.Γ. είναι γραμμική Ισομετρία αν και μόνο αν στέλνει ορθοκανονικές Βάσεις του πρώτου σε ορθοκανονικές βάσεις του 2ου

<u>Αποδ</u>

i) => ii)

Αφού T 1-1, επί, γραμμική έχουμε

$T: V \to W$ ισομορφισμός διαν. χώρων

Άρα από Γραμ. Αλγ. I αφού $e_1, \dots, e_n$

βάση του V, έπεται $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$

βάση του W. Έχουμε $\langle T(e_i), T(e_j) \rangle' =$

$$= \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 \in \mathbb{R} & \text{αν } i = j \\ 0 \in \mathbb{R} & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

T γραμ. ισομ.

Άρα $T(e_1), \dots, T(e_n)$ ορθοκαν. βάση του W

ii) => i) Θ.δ.ο T γραμμική ισομετρία

Από υπόθεση T γραμμική. Άρα T στέλνει

$e_1, e_2, \dots e_n$ του V σε βάση του W, από

Γραμ. Αλγ. I => T ισομορφισμός διαν.

χώρων, άρα T 1-1 και επί.

Έστω $u, v \in V$ αφού $e_1, \dots, e_n$ ~~...~~ βάση του

V υπάρχουν $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ ώστε

$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \quad v = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$

Αφού T γραμμική, $T(u) = \lambda_1 T(e_1) + \dots + \lambda_n T(e_n)$,

$T(v) = \mu_1 T(e_1) + \dots + \mu_n T(e_n)$. (1)

Θ.δ.ο $\langle T(u), T(v) \rangle' = \langle u, v \rangle$

Πράγματι $\langle u, v \rangle =$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \rangle =$$

<> διγραμμ...

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \langle e_i, e_j \rangle$$

$e_1, \dots e_n$ ορθοκαν

$$\underset{\text{Βάση}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \in \mathbb{R}$$

Επίσης $\langle T(u), T(v) \rangle' \overset{(1)}{=} \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} \mu_j T(e_j) \rangle'$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \langle T(e_i), T(e_j) \rangle'$$

Από υπόθεση (ii) $= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \in \mathbb{R}$ (4) Από (3), (4) έπεται η (2)

Πόρισμα. Έστω $(V, \langle\rangle), (W, \langle\rangle')$ δύο Ευκλείδιοι χώροι πεπερασμένης διάστασης ΤΑΕΙ

i) $(V, \langle\rangle), (W, \langle\rangle')$ ισομετρικοί Ευκλείδιοι χώροι, $V \neq \{0\}$, $W \neq \{0\}$ (δηλ. ύπαρξη $T: V \to W$ γραμ. ισομετρίας)

ii) $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$

Απόδ.

i) ⇒ ii) Άρα T γραμμική ισομετρία έπεται T ισομορφ. διαν χώρων $\overset{\ker T}{\Rightarrow} \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$

ii) ⇒ i) Υποθέτουμε $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$

Αλγόριθμος κατασκευής $T: V \to W$ γραμμ. ισομετρία

Βήμα 1

Έστω $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$.

Έστω $g_1 \dots g_n$ βάση του V. Με Gram-Schmidt χρησιμοποιώντας αυτή τη βάση, παίρνουμε ορθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_n$ του V

Βήμα 2

Έστω

$h_1, \dots, h_n$ βάση του W. Με Gram-Schmidt χρησιμοποιώντας αυτή τη βάση W, παίρνουμε ορθοκανονική βάση $g_1, \dots g_n$ του W

Βήμα 3

Ορίζουμε $T: V \to W$ με $T(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) =$
$= \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n \in W$

Αφού $e_1 \dots e_n$ βάση του V η T είναι καλά ορισμένη. Φανερά $T(e_i) = g_i$
και γραμμική

Αφού $g_1 \dots g_n$ ορθοκ. βάση του W από προηγ. πρόταση T γραμμ. ισομετρία

π.χ.

Φυλ 6 Άσκ 3

$\mathbb{R}^3$ με εσωτερικό γινόμενο

$<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)>_{καν} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

στον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}_2[x], <,>)$ με εσωτερικό γινόμενο $<f(x),g(x)> = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

Λύση

Από Θεώρημα Ι $= \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$

Βήμα 1

Η βάση $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι ορθοκανονική για το κανονικό εσωτ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$

Βήμα 2

Θεωρούμε την βάση $g_1=1, g_2=x, g_3=x^2$ του $\mathbb{R}_2[x]$ εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη βάση g_1, g_2, g_3 και μετά τις πράξεις έχουμε ορθοκανονική βάση

$g_1=1$

$q_2=\sqrt{12}(x-\frac{1}{2})$, $q_3=\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}}(x^2-x-\frac{1}{6})$ του

$\mathbb{R}_2[x]$

Βήμα 3

Άρα η T να ορίζεται από τον $(*)$ είναι γραμμ. ισομετρία $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$

Για $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ έχω/τι $T((a,b,c)) =$
$= T(ae_1 + be_2 + ce_3) = aq_1 + bq_2 + cq_3 =$

$$= \left(a - \frac{\sqrt{12}}{2} b - \frac{\sqrt{60}}{6\sqrt{7}} c\right) + \left(\sqrt{12}\, b - \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}} c\right) x + \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}} c x^2$$

Πρόταση

(Σύνδεση γραμμικής ισομετρίας $T: V \to V$ και ορθογώνιους πίνακες) (χωρίς απόδειξη)
Έστω $(V, \langle\,\rangle)$ χ.ε.γ. $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ορθοκανονική βάση του V και $T: V \to V$ γραμμική ΤΑΕ:
i) T γραμμική ισομετρία
ii) $[T]^{e}_{e} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος
(δηλ. αντιστρέφεται και έχει αντίστροφο τον ανάστροφο)

(Προσοχή: Η βάση e είναι ορθοκανονική και εμφανίζεται και πάνω και κάτω)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω $\mathbb{R}^n$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ η κανονική βάση
(δηλ. $e_i = (0, \ldots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\ \text{θέση}}}{1}, 0, \ldots, 0)$)

Θέτουμε
$A = \{ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ T \text{ γραμ. ισομετρία} \}$ i-θέση

$\mathcal{B} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A$ ορθογώνιος $\}$

Η προηγούμενη πρόταση, μας λέει ότι η απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ με $\Phi(T) = [T]^{e}_{e}$ είναι καλά ορισμένη 1-1 και επί

(Δηλαδή το σύνολο των γραμμικών ισομετριών $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο των ορθογώνιων πινάκων)

Θεώρημα Euler: Ανάλυση ορθογώνιων 2×2 πινάκων και 3×3 πινάκων

Ισοδύναμα με τη μελέτη γραμμικών ισομετριών $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ αντίστοιχα

Υπενθ.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος $\Leftrightarrow$ οι στήλες του A ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ με το συνήθες εσωτ. γινόμενο

π.χ.

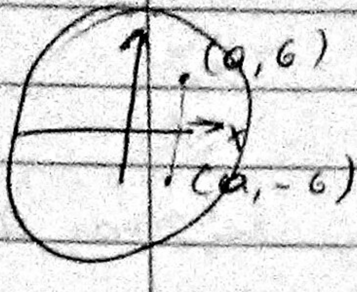
I_n είναι ορθογώνιος, το ίδιο και ο $-I_n$ επίσης:

$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ορθογώνιος, το ίδιο και ο πίνακας ανάκλασης $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

πίνακας ~~στρ~~ στροφής κατά γωνία θ

αντίστοιχης της $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T((x, y)) = (x, -y)$ ← Ανάκλαση ως προς τον άξονα των x.



Πρόταση

Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος τότε $\det A = 1$ ή -1

Απόδ. $AA^T = I_n \to \det(AA^T) = \det(I_n) = 1$
$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det A = 1$ ή -1

① Παρατήρ.

Για $A = I_n$: $\det A = 1$, για
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to \det A = -1$$

Δηλαδή $\exists$ ορθογώνιοι πίνακες με $\det A = 1$
και $\exists$ " " " " $\det A = -1$

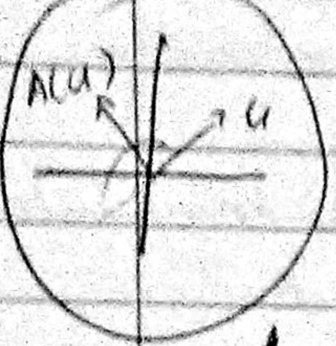
② Παρατήρ.

Υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που δεν έχουν καμία πραγματική ιδιοτιμή (άρα δεν είναι διαγωνίσιμοι επί του $\mathbb{R}$)

π.χ. Αν $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

στροφή κατά θ με $\theta \in (0, \pi)$ τότε ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, γιατί αν $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή και $u \in V_A(\lambda)$ μη μηδενικό έπεται ότι ο A στέλνει τον 1-διάστατο υπόχωρο

<u> στον εαυτό του (γιατί $Au = \lambda u$)
αντίφαση άρα $\theta \in (0, \pi)$ και A στο $\mathbb{R}^2$ στροφή κατά θ



Πρόταση

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος και $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A.
Τότε $|\lambda| = 1$ (δηλ. $\lambda \bar{\lambda} = 1$)

Απόδειξη

Αφού $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A υπάρχει $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ μη μηδενικό με $Av = \lambda v$ (1)

Θέτουμε $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$

Τότε $Av = \lambda v \Rightarrow \overline{(Av)} = \overline{(\lambda v)} \Rightarrow \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow$
$\underset{A \in \mathbb{R}^{n \times n}}{\Rightarrow} A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ (2)

Τότε $\bar{v}^t v = \bar{v}^t I_n v = \bar{v}^t A^t A v = (A\bar{v})^t (Av)$
$\overset{(1)(2)}{=} (\bar{\lambda}\lambda)\, \bar{v}^t v$

Άρα $(1 - \bar{\lambda}\lambda) \cdot \bar{v}^t v = 0$. Αφού
$\bar{v}^t v = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum z_i \bar{z}_i > 0$
αφού $v \neq 0_{n \times 1}$

η (3) δίνει $\lambda\bar{\lambda} = 1$, Άρα $|\lambda| = 1$

Φυλ 7 Λύση 1

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος. Δ.ο. ο $A + 3I_n$ είναι αντιστρέψιμος

Απόδειξη

Γενικά ξέραμε για $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) $A - \lambda I_n$ ΟΧΙ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ λ ιδιοτιμή του A. Αν ο $A + 3I_n$ δεν ήταν αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda = -3$ ιδιοτιμή του A αντίφαση στην πρόταση γιατί $|-3| = 3$ και όχι 1

Παρατήρηση

Με τον ίδιο επιχείρημα έπεται ότι αν $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος τότε ο $A - \sigma I_n$ αντιστρέφεται